Terceira Prova de Aritmética - MA14

GABARITO

2013/1 semestre

NOME: ____

Questão 1 (valor: 2 pontos)

a)(1,0) Mostre que se $7|a^2 + b^2$, sendo a e b são números inteiros, então $7|a$ e $7|b$.

b)(1,0) Resolva a equação diofantina $x^2 + y^2 = 637, \quad x, y \in \mathbb{N}$.

Sugestão: para a), escreva os números a e b na forma $7m + i$, com $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Questão 2 (valor: 2 pontos) Uma pessoa comprou cavalos e bois. Foram pagos 31 *escudos* por cavalo e 20 por boi e sabe-se que todos os bois custaram 7 *escudos* a mais do que todos os cavalos. Determine quantos cavalos e quantos bois foram comprados, sabendo que o número de bois está entre 40 e 95.

Questão 3 (valor: 1 ponto) Determine todos os números primos $p \in \mathbb{N}$ tais que $p|3^p + 7$.

Questão 4 (valor: 2 pontos) Um terno de números primos (p_1, p_2, p_3) é chamado de terno de *primos trigêmeos*, se $p_3 - p_2 = p_2 - p_1 = 2$.

a) (0,5) Mostre que $(3, 5, 7)$ é o único terno de primos trigêmeos.

b) (1,5) Determine todos os números primos $p \in \mathbb{N}$ que se escrevem ao mesmo tempo como soma de dois primos e como diferença de dois primos.

Questão 5 (valor: 1 ponto) Ache as raízes de $X^{10} - [1] = 0$ em $\mathbb{Z}_{11}$.

Questão 6 (valor: 2 pontos) Ache a menor quantia em Reais (R$) que quando distribuída entre 5 pessoas sobra 1 Real, quando distribuída entre 7 pessoas sobram 3 Reais e quando distribuída entre 9 pessoas sobram 5 Reais.

Soluções

1. a) Escrevendo um número c na forma $7m+i$, $i = 0, 1, \ldots, 6$, temos que $c^2 = 7(7m^2+2mi)+i^2$, logo $c^2 \equiv i^2 \mod 7$. Portanto, os possíveis valores de a^2 e b^2 módulo 7 são

$$\begin{aligned} 0^2 &\equiv 0 \mod 7 \\ 1^2 &\equiv 1 \mod 7 \\ 2^2 &\equiv 4 \mod 7 \\ 3^2 &\equiv 2 \mod 7 \\ 4^2 &\equiv 2 \mod 7 \\ 5^2 &\equiv 4 \mod 7 \\ 6^2 &\equiv 1 \mod 7 \end{aligned}$$

Assim, a única possibilidade para que $a^2 + b^2 \equiv 0 \mod 7$ é que $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \mod 7$. Logo, $7|a^2$ e $7|b^2$. Sendo 7 primo, temos que $7|a$ e $7|b$.

b) Se (a, b) é uma solução da equação diofantina, pelo item a) temos que $7|a$ e $7|b$, logo $a = 7k$ e $b = 7l$. Assim,

$$637 = a^2 + b^2 = 49(k^2 + l^2),$$

logo $k^2 + l^2 = 13$. Portanto, $k = 2$ e $l = 3$ ou $k = 3$ e $l = 2$, o que nos dá as soluções

$$a = 28,\ b = 21 \quad \text{ou} \quad a = 21,\ b = 28.$$

2. Chamando b o número de bois e c o número de cavalos, temos que $20b = 31c + 7$, logo a equação diofantina a ser resolvida é $20b - 31c = 7$. Por inspeção vemos que $b_0 = 5$ e $c_0 = 3$ (alternativamente, pode-se calcular uma solução particular usando o algoritmo de Euclides estendido). Assim a solução geral é dada por

$$b = b_0 + t31 = 5 + t31, \quad c_0 = c_0 + t20 = 3 + t20, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Como $40 < b < 100$, segue-se que $40 < 5 + t31 < 95$, ou seja, $t = 2$. Portanto, foram comprados 67 bois e 43 cavalos.

3. Pelo Pequeno Teorema de Fermat temos que $3^p \equiv 3 \mod p$, logo $3^p + 7 \equiv 10 \mod p$. Portanto $p|3^p + 7$ se, e somente se $p|10$. Como $p \in \mathbb{N}$ é primo, então $p = 2$ ou $p = 5$.

4. a) O terno $(3, 5, 7)$ é um terno de primos trigêmeo. Dados três inteiros $a, a + 2, a + 4$, um deles é divisível por 3, isto se vê escrevendo a na forma $3m + i$, $i = 0, 1, 2$.

Portanto, se a, $a+2$ e $a+4$ são primos, um dos três números é igual a 3, por ser divisível por 3. Portanto, a única possibilidade é $a = 3$, $a + 2 = 5$ e $a + 4 = 7$.

b) Suponhamos que $p = p_1 + p_2$ e $p = p_4 - p_3$, sendo p_1, p_2, p_3, p_4 números primos. O primo $p = 2$ não se escreve como soma de dois primos. Logo p é ímpar, o que implica que p_1 ou p_2 é par e o outro é ímpar, o mesmo ocorrendo para p_3 e p_4.

Trocando-se p_1 e p_2 de posição se necessário, vemos que a única possibilidade é $p_1 = 2$ e $p_3 = 2$, pois são primos pares.

Portanto, os primos $p_2 = p - 2$, p e $p_4 = p + 2$ são trigêmeos, logo $p_2 = 3$, o que implica $p = 5$.

5. Pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $a^{10} \equiv 1 \mod 11$, para todo $a \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Portanto, $[a]^{10} = [a^{10}] = [1]$ para todo $a \in A$. Logo $X^{10} - [1]$ tem como raízes $[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]$ em $\mathbb{Z}_{11}$.

6. Devemos resolver o sistema:

$$X \equiv 1 \mod 5, \ X \equiv 3 \mod 7, \ X \equiv 5 \mod 9.$$

Nas notações do Teorema Chinês dos Restos, Temos $N = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ e $N_1 = 63$, $N_2 = 45$ e $N_3 = 35$.

As congruências

$$N_1 Y \equiv 1 \mod 5$$

$$N_2 Y \equiv 1 \mod 7$$

$$N_3 Y \equiv 1 \mod 9,$$

possuem as soluções $y_1 = 2$, $y_2 = 5$ e $y_3 = 8$, respectivamente. Assim, pelo teorema, a única solução módulo $N = 315$ é dada por

$$x = N_1 y_1 + N_2 y_2 3 + N_3 y_3 5 = 2201.$$

Portanto, o menor número natural com a propriedade do problema é o resto da divisão de 2201 por 315, ou seja, 311.