Sociedade Brasileira de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

MA12 – Matemática Discreta
Avaliação - GABARITO AV 3 - MA 12
13 de julho de 2013

1. (2,0) Seja (a_n) uma progressão aritmética e seja (b_n) a sequência definida por

$$b_n = a_n + a_{n+1}, \quad \forall n \geq 1$$

a) (0,5) Mostre que (b_n) também é uma progressão aritmética.

b) (1,5) Suponha que a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) seja igual a $2n^2+5n$, para todo natural $n \geq 1$. Obtenha uma expressão para a soma dos n primeiros termos de (b_n).

Uma solução:

a) $b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = a_{n+2} - a_n = 2r$, sendo que r é a razão de (a_n). Logo, (b_n) é uma P.A. de razão $2r$.

b) Primeira solução:
$b_1 + b_2 + ... + b_n = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + ... + (a_n + a_{n+1}) =$
$= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}) = S_n + S_{n+1} - S_1 =$
$= 2n^2 + 5n + 2(n+1)^2 + 5(n+1) - 7 = 4n^2 + 14n$

Segunda solução:
Podemos determinar primeiramente o primeiro termo e a razão de (a_n).
A soma dos n primeiros termos de a_n é

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2} = (a_1 + a_1 + (n-1)r).\frac{n}{2} = r.\frac{n^2}{2} + (a_1 - \frac{r}{2}).n = 2n^2 + 5n$$

Logo, $\frac{r}{2} = 2$ e $(a_1 - \frac{r}{2}) = 5$. Daí, $r = 4$ e $a_1 = 7$. Portanto, (b_n) é uma P.A. cujo primeiro termo é $b_1 = a_1 + a_2 = 7 + 11 = 18$ e cuja razão é $2 \times 4 = 8$.
(alternativamente, podemos observar que $S_1 = 7$ e $S_2 = 18$; daí, $a_1 = 7$ e $a_2 = 11$ e, portanto, $r = 4$).

Portanto, a soma dos seus n primeiros termos de (b_n) é

$$(b_1 + b_n).\frac{n}{2} = (18 + 18 + (n-1).8).\frac{n}{2} = 4n^2 + 14n$$

.

2. (2,0) Seja (a_n) uma sequência tal que $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ e $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, para todo natural $n \geq 1$. Mostre, por indução finita, que

$$a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = a_{2n+1} - 2,$$

para todo $n \geq 1$.

Uma solução:

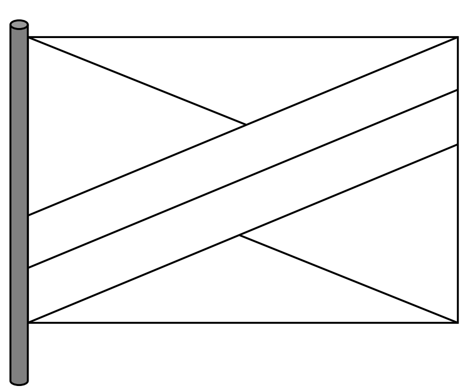
Seja $p(n)$ a afirmação: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = a_{2n+1} - 2$.

i) Para $n = 1$, temos $a_2 = 5$ e $a_3 = 2 + 5 = 7$. Logo, de fato temos $a_2 = a_3 - 2$, o que verifica a validade de $p(1)$.

ii) Suponhamos que $p(n)$ seja válida, ou seja, que $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} = a_{2n+1} - 2$. Daí: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{2n} + a_{2n+2} = a_{2n+1} + a_{2n+2} - 2 = a_{2n+3} - 2$, o que mostra que $p(n+1)$ é válida.

Logo, pelo princípio da indução finita, $p(n)$ é válida para todo n natural.

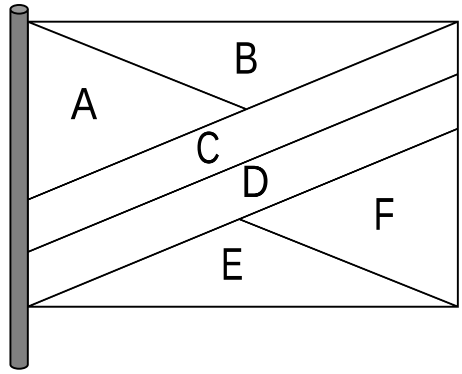
3. (2,0) Considere a bandeira da figura abaixo, formada por seis regiões. Para colori-la, há lápis de cor de quatro cores diferentes.



a) ((0,5) De quantos modos ela pode ser colorida de modo que regiões adjacentes tenham cores diferentes?

b) (1,5) Resolva o item a), supondo agora que todas as quatro cores sejam utilizadas para pintar cada bandeira.

Uma solução:



a) Colorindo as regiões na ordem indicada, o número de possibilidades é $4\times3\times2\times3\times3\times2 = 432$

b) Nas condições exigidas, não é possível pintar a bandeira com apenas uma cor ou com duas cores apenas, mas é possível pintá-la com três cores (sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor).

Colorindo as regiões na ordem indicada com apenas 3 cores, o número de possibilidades é $3\times2\times1\times2\times2\times1 = 24$. Mas as 3 cores a serem usadas podem ser escolhidas de 4 modos. Logo, o número de modos de colorir a bandeira usando todas as quatro cores é $432 - 4 \times 24 = 336$.

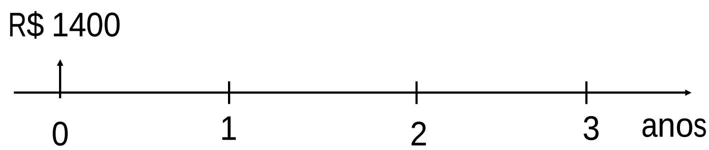
4. (2,0) João precisa comprar uma peça para seu carro, com o qual ele espera ficar por mais 3 anos. Ele pode comprar, por $R\$\,1400,00$, uma peça original, que vai durar todo este período, ou, por $R\$\,500,00$, uma peça alternativa, que dura apenas 1 ano. Suponha que o valor do dinheiro seja de 10% ao ano.

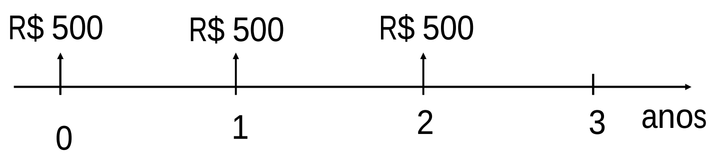
a) (1,0) Mostre que, apesar do desembolso total com a peça alternativa ser maior, ela é a mais vantajosa para João.

b) (1,0) João acha que pode conseguir um desconto na peça original. A partir de que valor vale a pena ele optar por ela?

Uma solução:

a) Devemos comparar os seguintes esquemas de pagamento:





Levando ambos para a data 2:
Peça original: $1400 \times (1,1)^2 = 1400 \times 1,21 = 1694$
Peça alternativa: $500 \times (1,1)^2 + 500 \times 1,1 + 500 = 605 + 550 + 500 = 1655$.
Logo, o custo com a peça alternativa é inferior.

b) Para que os esquemas sejam equivalentes, o preço p da peça original deve ser tal que $p \times 1,21 = 1655$, ou seja, $p = \frac{1655}{1,21} \approx 1367,77$ reais.

5. (2,0) As faces de um dado honesto são numeradas de 1 a 3 (cada número aparece duas vezes). Seja p_n a probabilidade de que a soma das faces obtidas em n lançamentos seja par.

a) (1,0) Explique porque a sequência p_n satisfaz a recorrência $p_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot p_n$. Qual é o valor de p_1?

b) (1,0) Resolva a equação de recorrência em a) para obter uma expressão para p_n.

[*Sugestão: determine uma constante k tal que $p_n = k$ seja uma solução da recorrência e faça a substituição $p_n = y_n + k$, para obter uma recorrência homogênea ou você também pode usar o método geral visto no curso para resolver recorrências lineares não homogêneas.*]

Uma solução:

a) $p_{n+1} = P$(soma par em $n+1$ lançamentos) $=$
$= P$(soma par em n lançamentos)$.P$(sai par no lançamento $n+1$) $+$
P(soma ímpar em n lançamentos)$.P$(sai ímpar no lançamento $n+1$)
Logo

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{1}{3} + (1-p_n) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot p_n$$

O valor de p_1 é 1/3.

b) Seguindo a sugestão: $k = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot k$, o que resulta em $k = \frac{1}{2}$. Fazendo a substituição $p_n = y_n + \frac{1}{2}$, obtemos

$$y_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(y_n + \frac{1}{2}),$$

ou seja $y_{n+1} = (-\frac{1}{3})y_n$.

A solução geral desta recorrência homogênea é $y_n = C(-\frac{1}{3})n$. Logo, $p_n = \frac{1}{2} + C(-\frac{1}{3})^n$. Vamos determinar C. Substituindo $n = 1$, obtemos $p_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + C(-\frac{1}{3})$, que fornece $C = \frac{1}{2}$. Portanto, a solução da recorrência é

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3})^n$$

.

Vejamos agora como solucionar a mesma questão usando o método geral para resolver recorrências não homogêneas de primeira ordem.

Uma solução da equação homogênea $p_{n+1} = (-\frac{1}{3})p_n$ é $a_n = (-\frac{1}{3})^n$. Fazendo a substituição $p_n = a_n y_n$, temos

$$(-\frac{1}{3})^{n+1} y_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^n y_n,$$

ou seja, $y_{n+1} - y_n = \frac{2}{3} \cdot (-3)^{n+1}$.

Escrevendo esta igualdade para n variando de 1 a $n-1$ e somando:

$$y_n - y_1 = (\frac{2}{3})\big[(-3)^2 + ... + (-3)^n)\big] \overset{(PG)}{=} \frac{3}{2} \cdot \big[1 - (-3)^{n-1}\big]$$

.

Daí $y_n = y_1 + \frac{3}{2} \cdot [1 - (-3)^{n-1}]$. Mas $p_1 = \frac{1}{3}$. Logo $-\frac{1}{3} \cdot y_1 = \frac{1}{3}$, ou seja $y_1 = -1$. Logo,

$$y_n = -1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(-3)^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-3)^n$$

Daí, finalmente:

$$p_n = (-\frac{1}{3})^n y_n = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3})^n + \frac{1}{2}$$