MA12 – Matemática Discreta
Avaliação - GABARITO AV 2 - MA 12
29 de junho de 2013

1. (2,0) Penélope quer distribuir 6 presentes entre seus sobrinhos Alfredo, Bruno, Carlos e Daniel, de modo que cada um receba pelo menos um presente. Todos os presentes devem ser distribuídos.

a) (0,5) Supondo que todos os presentes sejam iguais, de quantos modos ela pode distribuir os presentes?

b) (1,5) Resolva novamente o item a), supondo agora que todos os presentes sejam diferentes.

Uma solução:

a) Uma vez tendo distribuído um presente para cada um dos sobrinhos, sobram 2 presentes, para distribuir para 4 crianças. O número de modos de fazê-lo é igual ao número de soluções não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, que é igual a $CR_{4,2} = C_{5,2} = 10$.

É também fácil enumerar todas as possibilidades: há 4 modos de uma das crianças receber dois presentes adicionais e $C_{4,2} = 6$ modos de duas delas receberem um presente adicional cada. Aqui estão as possibilidades:

$$\frac{ABCD}{3\,1\,1\,1} \quad \frac{ABCD}{1\,3\,1\,1} \quad \frac{ABCD}{1\,1\,3\,1} \quad \frac{ABCD}{1\,1\,1\,3}$$

$$\frac{ABCD}{2\,2\,1\,1} \quad \frac{ABCD}{2\,1\,2\,1} \quad \frac{ABCD}{2\,1\,1\,2} \quad \frac{ABCD}{1\,2\,2\,1} \quad \frac{ABCD}{1\,2\,1\,2} \quad \frac{ABCD}{1\,1\,2\,2}$$

b) Primeiro, devemos decidir qual é a quantidade de presentes que cada sobrinho vai receber. As possibilidades são as seguintes:

- um dos sobrinhos recebe 3 presentes e os demais 1.

O sobrinho a receber os 3 presentes pode ser escolhido de 4 modos. Os presentes dos demais podem ser escolhidos de $6 \times 5 \times 4 = 120$ modos (os que restarem ficam com o sobrinho que recebe 3 presentes). O número total de possibilidades é $4 \times 120 =$ 480.

- exatamente dois sobrinhos recebem dois presentes.

Esses sobrinhos podem ser escolhidos de $C_{4,2} = 6$ modos. Os presentes dos outros sobrinhos podem ser escolhidos de $6 \times 5 = 30$ modos. Os presentes de um dos sobrinhos a receber 2 presentes podem ser escolhidos de $C_{4,2} = 6$ modos. O número total de possibilidades é $6 \times 30 \times 6 = 1080$.

O número total de modos de distribuir os presentes é $480 + 1080 = 1560$.

2. (2,0) Sejam R o raio da base e h a altura de um cilindro circular reto.

a) (0,5) Calcule a média aritmética e a média geométrica dos valores Rh, Rh e $2R^2$.

b) (1,5) Use a desigualdade das médias para calcular qual é a menor área total possível para um cilindro circular reto com um volume V dado. Que relação deve existir entre o raio da base e a altura desse cilindro para que ele tenha essa menor área possível?

Uma solução:

a) A média aritmética é $A = (2Rh + 2R^2)/3$ e a geométrica é $G = (2R^4h^2)^{\frac{1}{3}}$.

b) A área total do cilindro é $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$, enquanto que seu volume é $V = \pi R^2 h$. Logo

$$A = \frac{S}{3\pi} \qquad \text{e} \qquad G^3 = \frac{2V^2}{\pi^2}$$

Daí, pela desigualdade das médias, $A \geq G$, e portanto

$$\frac{S}{3\pi} \geq (\frac{2V^2}{\pi^2})^{\frac{1}{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad S \geq 3(2\pi V^2)^{\frac{1}{3}}$$

Assim, a menor área total possível para um volume V fixo é $S = 3(2\pi V^2)^{\frac{1}{3}}$.

Para que valha a igualdade (e portanto para que o cilindro tenha área total mínima), os elementos que compõem as médias devem ser todos iguais, logo deve-se ter $Rh = 2R^2$, ou seja, $h = 2R$.

3. (2,0) João tem dois dados. O dado A tem três faces vermelhas e três azuis. O dado B tem duas faces vermelhas e quatro azuis. Ele escolhe um dos dados ao acaso e o lança. Se a face que sai é azul, ele lança a seguir o dado A; se é vermelha, ele lança o dado B.

a) (0,5) Qual é a probabilidade de que o segundo dado lançado seja o dado B?

b) (0,5) Qual é a probabilidade de que saia uma face vermelha no segundo lançamento?

c) (1,0) Se a face que sai no segundo lançamento é vermelha, qual é a probabilidade de que o primeiro dado lançado tenha sido o A?

Uma solução:

a) $P(2^o \,\text{dado é}\, B) = P(1^o \,\text{dado é}\, A).P(2^o \,\text{dado é}\, B|1^o \,\text{dado é}\, A) +$
$+P(1^o \,\text{dado é}\, B).P(2^o \,\text{dado é}\, B|1^o \,\text{dado é}\, B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

É claro que $P(1^o \,\text{dado é}\, A) = \frac{7}{12}$; isto será usado no próximo ítem.

b) $P(2^a \text{ é Vermelha}) = P(2^o \,\text{dado é}\, A).P(\text{Vermelha}|A) + P(2^o \,\text{dado é}\, B).P(\text{Vermelha}|B)$ $= \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{31}{72}$.

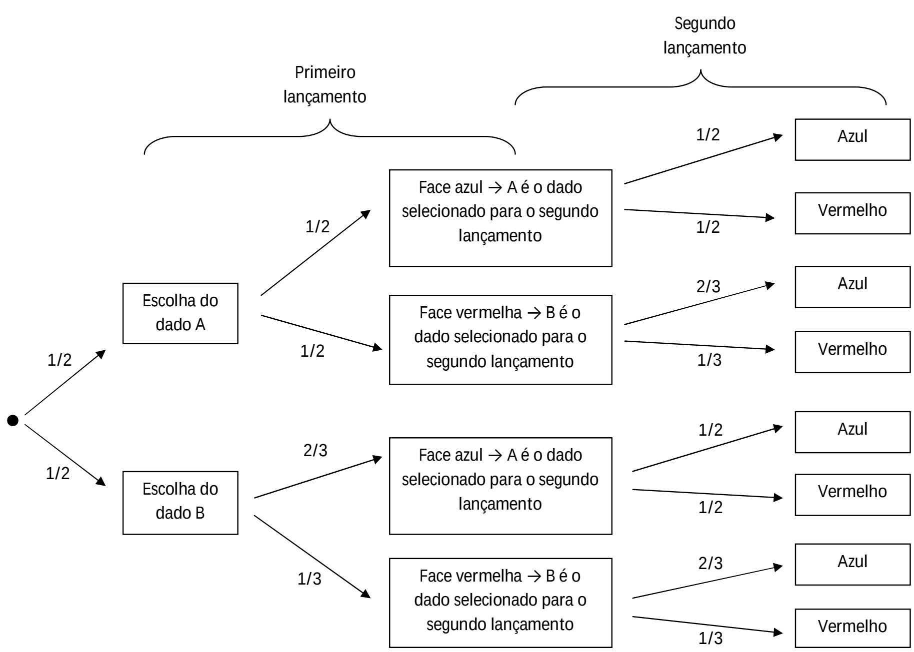
c) $P(1^o \,\text{dado é}\, A|2^a \text{ é Vermelha}) = \text{P}(1^o \,\text{dado é}\, A \text{ e } 2^a \text{ é Vermelha})/P(2^a \text{ é Vermelha})$.

Mas

$P(1^o \,\text{dado é}\, A \text{ e } 2^a \text{ é Vermelha}) = \text{P}(1^o \,\text{dado é}\, A \text{ e } 2^o \,\text{dado é}\, A \text{ e } 2^a \text{ é Vermelha}) +$
$+P(1^o \,\text{dado é}\, A \text{ e } 2^\circ \,\text{dado é}\, B \text{ e } 2^a \text{ é Vermelha}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$.

Logo, $P(1^o \,\text{dado é}\, A|2^a \text{ é Vermelha}) =$
$= P(1^o \,\text{dado é}\, A \text{ e } 2^a \text{ é Vermelha})/P(2^a \text{ é Vermelha}) = (\frac{5}{24})/(\frac{31}{72}) = \frac{15}{31}$.

Estes resultados podem ser obtidos também usando-se diretamente o diagrama:



4. (2,0) Em uma reunião há 26 pessoas, com idades variando entre 16 e 65 anos.

a) (1,0) Mostre que há na reunião pelo menos um par de pessoas cujas datas de nascimento estejam espaçadas por menos de 2 anos.

b) (0,5) Existe um mês do ano em que pelo menos k pessoas dentre as presentes na reunião fazem aniversário. Qual é o maior valor de k para o qual esta sentença é necessariamente verdadeira?

c) (0,5) Considere a afirmação: *Existe um mês em que pelo menos quatro pessoas do mesmo sexo dentre as presentes na reunião fazem aniversário.* Quantas pessoas a mais, no mínimo, devem chegar à reunião para que se tenha certeza de que esta afirmativa seja verdadeira?

Uma solução:

a) Sejam $x_1 \leq x_2 ... \leq x_{26}$ as idades em ordem não decrescente. Por hipótese temos que $x_1 \geq 16$ e $x_{26} \leq 65$. Como

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{26} - x_{25}) = x_{26} - x_1 \leq 65 - 16 = 49,$$

então a média aritmética

$$\frac{(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{26} - x_{25})}{25}$$

é menor do que $49/25$ e pelo menos uma das diferenças $(x_{i+1} - x_i)$ é menor ou igual do que $49/25$ e, portanto, menor do que 2.

Obs.: A rigor, $x_{26} - x_1$ não é, necessariamente, igual a 49; isto ocorre quando discretizamos o tempo em anos, mas, de fato, a pessoa com idade x_1 pode ter acabado de completar 16 anos e a pessoa com idade x_{26} pode estar prestes a fazer 66. Em qualquer caso certamente $x_{26} - x_1$ é estritamente menor que 50, o que faz com que a conclusão seja válida.

b) A resposta é $k = 3$. Como há 26 pessoas e 12 possibilidades para o mês de aniversário, há um mês em que nasceram no mínimo $26/12 = 2,1...$ pessoas. Portanto, há um mês em que nasceram pelo menos três pessoas. Não se pode garantir que haja 4 pessoas em um mesmo mês (basta distribuir as pessoas colocando duas em cada um de 10 meses e três em cada um dos outros 2 meses).

c) Há 24 combinações (gavetas) possíveis de sexo e mês de aniversário. Logo, para que se possa garantir que haja 4 pessoas em uma mesma gaveta, é preciso que haja pelo menos $24 \times 3 + 1 = 73$ objetos (pessoas). Portanto, é preciso que cheguem mais $73 - 26 = 47$ pessoas.

5. (2,0) No sorteio da Mega-Sena, são sorteados, consecutivamente e sem reposição, 6 números de 1 a 60.

a) (1,0) Qual é a probabilidade de que o número 23 seja um dos sorteados?

b) (1,0) Qual é a probabilidade de que o último número sorteado seja o maior dos 6 números que foram sorteados?

Uma solução:

a) Primeira solução: A probabilidade que 23 saia em cada um dos números sorteados é $1/60$. Logo, a probabilidade de que saia em um deles é $6 \times 1/60 = 1/10$.

Segunda solução: O número de casos possíveis para o sorteio é $60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55$. O número de casos favoráveis é

$$6 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55$$

(6 é o número de modos de se escolher a posição do 23 e o produto dos demais fatores dá o número de modos de se escolher os outros 5 números)

A probabilidade de aparecer o 23 é, portanto,

$$(6 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55)/(60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55) = 1/10$$

b) Como os números são sorteados ao acaso, todas as ordenações dos números sorteados são igualmente prováveis. Logo, é igualmente provável que o maior número apareça em cada posição. Assim, a probabilidade de que ele apareça na última posição é $1/6$.