MA12 – Matemática Discreta
Avaliação - GABARITO AV 1 - MA 12
27 de abril de 2013

1. *(valor 3,0)*

Paulo economizou durante muitos anos e tem, hoje, $R\$$ 500.000,00 aplicados em um investimento que rende juros de 1% ao mês. A partir do próximo mês, ele pretende fazer uma retirada mensal de $R\$$ 1.000,00.

a) Seja s_n o saldo que resta da aplicação, após fazer a n-ésima retirada. Exprima s_{n+1} em termos de s_n. Dê também a condição inicial da recorrência obtida. *(pontuação parcial 0,5)*

b) Obtenha uma expressão para s_n em função de n. (*pontuação parcial 1,5)*

c) Qual é a retirada mensal máxima que Paulo pode fazer de modo que o saldo da aplicação nunca se torne negativo? *(pontuação parcial 1,0)*

Uma solução:

a) $s_{n+1} = 1,01.s_n - 1\,000$, com $s_0 = 500\,000$ (ou $s_1 = 504\,000$).

b) Uma primeira solução pode ser feita resolvendo-se a recorrência acima. Uma solução da equação homogênea associada $a_{n+1} = 1,01.a_n$ é $a_n = 1,01^{n-1}$.

Fazendo a substituição $s_n = a_n y_n$, obtemos $y_{n+1} = y_n - \frac{1\,000}{1,01^n}$. Usando a recorrência recem encontrada e somando os termos, encontramos

$$y_n = y_0 - 1\ 000(1 + \frac{1}{1,01^1} + ... + \frac{1}{1,01^{n-1}}) =$$

$$= y_0 - 1\,000.\frac{1 - \frac{1}{1,01^n}}{1 - \frac{1}{1,01}} = y_0 - 100\,000.1,01.(1 - \frac{1}{1,01^n})$$

.

Daí, $s_n = a_n y_n = 1,01^{n-1} y_0 - 100\,000.1,01^n.(1 - \frac{1}{1,01^n}) = 1,01^{n-1} y_0 - 100\,000(1,01^n - 1)$.

Finalmente, de $s_0 = a_0 y_0$, obtemos $500\,000 = \frac{1}{1,01} y_0$, ou seja $y_0 = 500\,000.1,01$. Logo, a expressão de s_n é

$$s_n = 500\,000.1,01^n - 100\,000(1,01^n - 1) = 400\,000.1,01^n + 100\,000.$$

Uma segunda solução desta questão pode ser feita utilizando-se o teorema sobre o valor de uma série uniforme. O valor das n retiradas, no mês anterior à primeira retirada é $1\,000.\frac{1-\frac{1}{1{,}01^n}}{0{,}01} = 100\,000(1-\frac{1}{1{,}01^n})$.

Para obter o valor dessas retiradas no mês da n-ésima retirada, devemos multiplicar o valor no instante inicial por $1,01^n$, obtendo $100\,000(1,01^n - 1)$. O valor inicial do investimento, nesta mesma época, é igual a $500\,000 \times 1,01^n$. Portanto, o saldo restante após a n-ésima retirada é

$$500\,000 \times 1,01^n - 100\,000(1,01^n - 1) = 400\,000 \times 1,01^n + 100\,000.$$

c) A maior retirada possível é o rendimento mensal, igual a $0,01 \times 500\,000 = 5\,000$. Podemos chegar a este resultado resolvendo o item b) para uma retirada genérica p, para a qual obteremos, após a n-ésima retirada, o valor $(50\,0000 - 100p) \times 1,01^n + 100\,000$.

Para que este valor nunca se torne negativo, devemos ter $500\,000 - 100p \geq 0$, ou seja, $p \leq 5\,000$.

2. *(valor 2,5)*

a) Para que valores de b existe uma progressão geométrica para a qual a soma dos n primeiros termos é igual a $3^{n+1} + b$, para todo n natural? *(pontuação parcial 1,0)*

b) Quais são o primeiro termo e a razão dessa progressão? *(pontuação parcial 1,5)*

Uma solução:

A soma dos n primeiros termos da progessão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q é

$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a_1q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1}$$

Esta expressão deve ser idêntica a $3.3^n + b$. Devemos ter, portanto, $q = 3$ e $\frac{a_1}{q-1} = 3$. Daí, $a_1 = 6$ e o valor de b é $\frac{-a_1}{q-1} = -3$.

3. *(valor 2,0)*

Prove, por indução finita, que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2},$$

para todo n natural.

Uma solução:

Seja $P(n)$ a sentença $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2}$.

$P(1)$ é verdadeira, já que $\frac{1}{2^{1-1}} = 1 > \frac{1}{2}$.

Suponhamos $P(n)$ verdadeira para algum $n > 1$, ou seja, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2}$, $n > 1$.

Daí, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\dots \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}+\frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}+\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

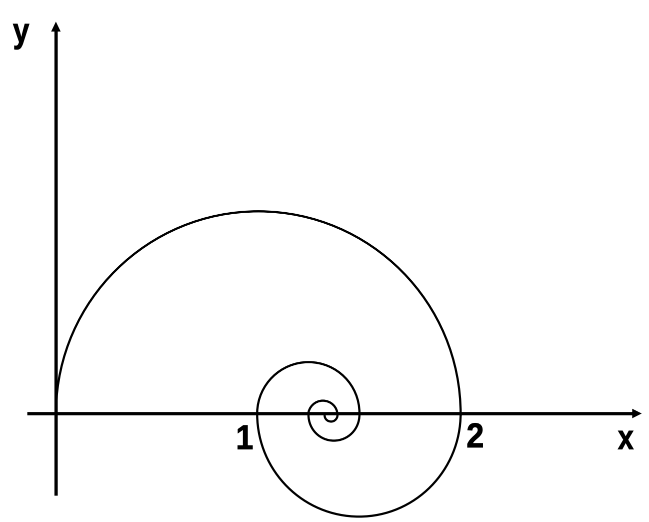
Logo, $P(n+1)$ também é verdadeira. Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

4. *(valor 1,5)*

Na figura abaixo temos uma espiral formada por infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, determine:

a) o comprimento total da espiral. *(pontuação parcial 0,75)*

b) a abscissa do ponto P assintótico da espiral. *(pontuação parcial 0,75)*



Uma solução:

a) O comprimento total da espiral é $\pi.1 + \pi.\frac{1}{2} + \pi.\frac{1}{4} + \cdots = \pi\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi$

b) A abscissa do ponto P é $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + ... = 2 - \frac{1}{1-(-(\frac{1}{2}))} = \frac{4}{3}$.

5. *(valor 1,0)*

a) Se (a_n) é uma progressão geométrica de termos positivos, prove que (b_n) definida por $b_n = log\, a_n$ é uma progressão aritmética. *(pontuação parcial 0,5)*

b) Se (a_n) é uma progressão aritmética, prove que (b_n) definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica. *(pontuação parcial 0,5)*

Uma solução:

a) Como $b_{n+1} - b_n = log\, a_{n+1} - log\, a_n = log\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = log\, q$ = constante, sendo q a razão da progressão geométrica (a_n), então (b_n) é uma progressão aritmética.

b) Como $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1}-a_n} = e^r$ = constante, sendo r a razão da progressão aritmética (a_n), então (b_n) é uma progressão geométrica.