EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO 2013 - 2

NOME:____

Questão 1. Considere um triângulo equilátero de lado 3 e seja A_1 sua área. Ao ligar os pontos médios de cada lado, obtemos um segundo triângulo equilátero de área A_2 inscrito no primeiro. Para este segundo triângulo equilátero, ligamos os pontos médios de seus lados e obtemos um terceiro triângulo equilátero de área A_3 inscrito no segundo e assim sucessivamente, gerando uma sequência de áreas (A_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$

Usando o Princípio de Indução Finita, mostre que a fórmula $A_n = \dfrac{9\sqrt{3}}{4^n}$ é verdadeira para todo $n \geq 1$ natural.

Questão 2. A sequência (a_n), $n \geq 0$, é definida da seguinte maneira:

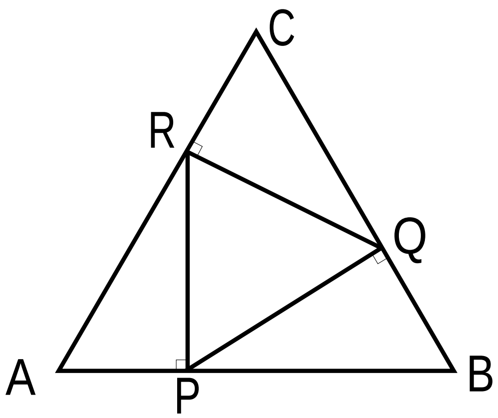
- $a_0 = 4$
- $a_1 = 6$
- $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}, \quad n \geq 1$

a) Encontre a_7.

b) Encontre a soma dos primeiros 2013 termos da sequência.

Questão 3. Um cone de revolução tem altura x e está circunscrito a uma esfera de raio 1. Calcule o volume desse cone em função de x.

Questão 4. Na figura, temos um triângulo equilátero ABC e um segundo triângulo PQR cujos lados $\overline{RP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ são, respectivamente, perpendiculares aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ do triângulo ABC.



a) Mostre que o triângulo PQR é equilátero. Conclua que $AP = BQ = CR$.

b) Se o triângulo ABC tem área 1, encontre a área do triângulo PQR.

Questão 5. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer.

a) A função composta $g \circ f$ é necessariamente periódica? Em caso afirmativo, demonstre; em caso negativo, apresente um contra-exemplo.

b) A função composta $f \circ g$ é necessariamente periódica? Em caso afirmativo, demonstre; em caso negativo, apresente um contra-exemplo.

Questão 6. Considere a equação:

$$\frac{1}{2}|x||x-3| = 2|x - \frac{3}{2}|$$

a) Quais são as raízes dessa equação? Explique detalhadamente como as encontrou.

b) Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{2}|x||x-3|$ e $g(x) = 2|x - \frac{3}{2}|$ e marque as raízes que você encontrou no ítem a).

Questão 7. Determine todos os inteiros X que são soluções da congruência

$$X^{49} + X^{14} + X^{12} - 2X \equiv 0 \,(mod 7)$$

Questão 8. Encontre o menor natural k, $k > 2008$, tal que $1 + 2 + \cdots + k$ seja um múltiplo de 13. Justifique sua resposta.