Questão 1.

(1,5) Sejam a e b dois números naturais tais que $(a, b) = pq$, em que p e q são dois números primos distintos. Quais são os possíveis valores de

(a) (a^2, b)?

(b) (a^3, b)?

(c) (a^2, b^3)?

Questão 2.

(2,0) Ache o resto da divisão por 17 do número

$$S = 1^{16} + 2^{16} + 3^{16} + \cdots + 85^{16}.$$

Questão 3.

(1,5) É possível repartir exatamente $\binom{2357}{528}$ objetos entre 49 pessoas?

Questão 4.

(2,0) Dispomos de uma quantia de x reais menor do que 3.000. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra um real; se a distribuirmos entre 12 pessoas, sobram dois reais, e se a distribuirmos entre 13 pessoas, sobram 3 reais. De quantos reais dispomos?

Sugestão: Pode ser útil utilizar o seguinte fato: c é solução da congruência $ay \equiv b \bmod m$ se, e somente se, c é solução da congruência $ry \equiv b \bmod m$, onde r é o resto da divisão de a por m.

Questão 5.

(1,0) Sabendo que $7^4 = 2401$, ache os algarismos da dezena e da unidade do número 7^{99999}.

Questão 6.

Considere $\mathbb{Z}_m$ para $m > 2$.

(0,5) (a) Mostre que $\mathbb{Z}_m$ tem sempre um número par de elementos invertíveis. *Sugestão:* Analise a paridade de $\varphi(m)$, quando $m > 2$.

(0,5) (b) Mostre que se $[a]$ é invertível em $\mathbb{Z}_m$, então $-[a] = [m - a]$ é invertível e $[a] \neq -[a]$.

(0,5) (c) Mostre que a soma de todos os elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_m$ é igual a 0.

(0,5) (d) Mostre que a soma de todos os elementos de um sistema reduzido qualquer de resíduos módulo m é sempre múltiplo de m.

Observação: em cada item, pode-se usar a afirmação cuja demonstração é pedida em um item anterior sem necessariamente tê-la demonstrado.