
MA11 – Números e Funções Reais**Avaliação 2****22 de junho de 2013**

1. [2 pontos] Em cada um dos itens abaixo, dê, se possível, um exemplo de um polinômio $p(x)$ satisfazendo todas as condições dadas.

Caso o exemplo não seja possível, justifique a sua resposta.

Lembre-se que se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ então

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

- (a) $p(1) = p(-1) = 0$, $p'(0) = 1$ e $p(x)$ é de grau 2.
- (b) $p(1) = p(-1) = 0$ e $p'(0) = 1$.
- (c) $p(1) = p(-1) = 0$, $p'(0) = 0$ e $p(x)$ é de grau 2.
- (d) $p(1) = p(-1) = 0$, $p(0) = p(2) = 1$ e $p(x)$ é de grau 2.
- (e) $p(1) = p(-1) = 0$, $p(0) = p(2) = 1$ e $p(x)$ é de grau 3.

[pontuação de cada item: 0,4 ponto]

2. [2 pontos] Um número real x_0 é raiz de multiplicidade k do polinômio $p(x)$ se $p(x) = (x - x_0)^k q(x)$, para algum polinômio $q(x)$, com $q(x_0) \neq 0$.

Sugestão para resolver os itens abaixo: Use o fato de que toda função polinomial é uma função contínua e que "Se f é uma função real contínua e $f(x_0) \neq 0$, então existe uma vizinhança de x_0 em que f não se anula".

- (a) Mostre que x_0 é raiz de multiplicidade par de $p(x)$ se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $p(x)$ não muda de sinal para x pertencente ao conjunto $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r, x \neq x_0\}$. [0,8 ponto]
- (b) Mostre que x_0 é raiz de multiplicidade ímpar de $p(x)$ se, e somente se, existe $r > 0$ tal que o sinal de $p(x)$ para $x \in]x_0 - r, x_0[$ é oposto ao sinal de $p(x)$ para $x \in]x_0, x_0 + r[$. [0,8 ponto]
- (c) Interprete geometricamente os resultados dos dois itens anteriores. [0,4 ponto]

3. [2 pontos] A massa de certas substâncias radioativas decresce a uma taxa proporcional à própria massa. A *meia-vida* T de uma substância como essa é definida como o tempo transcorrido para que sua massa se reduza à metade da inicial. Considere uma substância radioativa S que cuja meia-vida é de 5.000 anos.

(a) Considere uma massa de $m_0 = 7\text{ g}$ da substância S . Qual é o tempo transcorrido para a massa se reduza a $\frac{1}{8}$ da inicial? Este tempo depende da massa inicial m_0 ? Justifique sua resposta. [0,2 ponto]

(b) Determine a função $m : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que dá a massa da substância S , com massa inicial m_0 , em função do tempo medido em anos. [0,8 ponto]

(c) Use as aproximações $\log_{10}(2) \cong 0,3$ e $\log_{10}(5) \cong 0,7$ para determinar uma aproximação para o tempo gasto para a massa da substância S se reduzir a 10% da inicial. [1 ponto]

4. [2 pontos] Considere uma reta r , um ponto $A \notin r$ e três pontos $B, C, D \in r$, tais que C está entre B e D . Em cada um dos itens a seguir, decida se os dados são suficientes para determinar com certeza as medidas de:

(i) cada um dos lados do triângulo ABC ;

(ii) cada um dos ângulos do triângulo ABC .

Justifique rigorosamente as suas respostas.

(a) $\overline{BC} = 1$ e $\widehat{BAC} = 60^\circ$; [0,5 ponto]

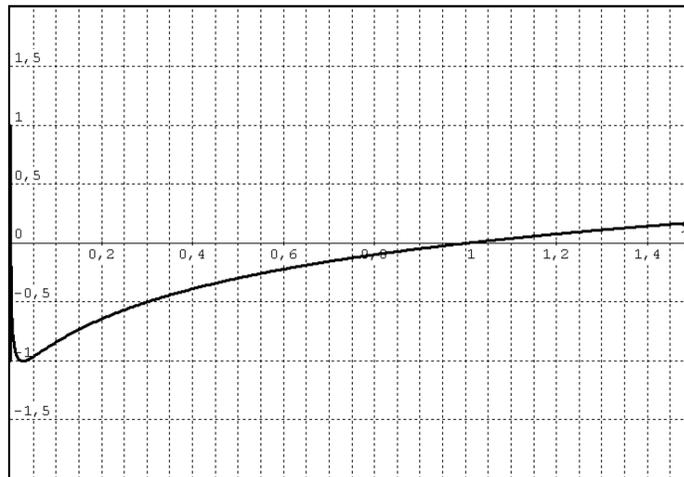
(b) $\overline{BC} = 1$ e $\widehat{ACD} = 135^\circ$; [0,5 ponto]

(c) $\overline{BC} = 1$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ e $\widehat{ACD} = 135^\circ$; [0,5 ponto]

(d) $\widehat{BAC} = 60^\circ$ e $\widehat{ACD} = 135^\circ$. [0,5 ponto]

5. [2 pontos] A figura a seguir representa um esboço do gráfico da função $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \text{sen}(\log_{10}(x))$, feito por um aplicativo computacional. Observe que o aplicativo não conseguiu desenhar em detalhes o que ocorre perto da origem do sistema de coordenadas.





- (a) Determine todas as raízes da equação $g(x) = 0$. É possível determinar a menor raiz?
 [0,6 ponto]
- (b) Faça um esboço do gráfico de g na janela gráfica $0 < x < 0,1$ e $-2 < y < 2$.
 [0,7 ponto]
- (c) Considere um sistema de coordenadas $x'y$ em que o eixo horizontal x' está em escala logarítmica decimal (isto é, se x representa um eixo em coordenadas cartesianas convencionais, então $x' = \log_{10} x$) e o eixo vertical y está em coordenadas cartesianas convencionais. Faça um esboço do gráfico de g neste sistema, para $10^{-4} < x < 10^4$ e $-2 < y < 2$. [0,7 ponto]