Questão 1. (2,0) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 0$ e $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que ou $f(x) = x$ para todo x ou então $f(x) = -x$ seja qual for x.

Questão 2. (2,0) Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, consideremos as funções afins $g(x) = mx + t$, onde m é fixo e t será escolhido convenientemente. Prove que existe uma (única) escolha de t para a qual a equação $f(x) = g(x)$ tem uma, e somente uma, raiz x. Interprete este fato geometricamente em termos dos gráficos de f e g.

Questão 3. (2,0) Dados os pontos $A = (3, 7)$, $B = (4, 5)$, $C = (5, 5)$ e $D = (5, 3)$ em $\mathbb{R}^2$, determine a função afim $f(x) = ax + b$ cujo gráfico contém três desses pontos.

Questão 4. (2,0) A população de uma cultura de bactérias, num ambiente estável e controlado, é estimada pela área que ocupa sobre uma superfície plana. Se, decorridos 20 dias, a população duplicou, então ela ficou 50% maior

(a) antes de 10 dias.

(b) ao completar 10 dias.

(c) após 10 dias.

Escolha a resposta certa e justifique sua opção.

Questão 5. (2,0) Dados números reais positivos x e y, ache α e β tais que $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \beta$. Em seguida mostre como (mediante o uso de uma tabela de funções trigonométricas) esta igualdade pode ser empregada para reduzir o produto de dois números reais positivos *quaisquer* às operações de soma e divisão por 2.