MA14 – Aritmética I – Avaliação 1 – 2011

Questão 1.

(1,0) (a) Determine o maior número natural que divide todos os produtos de três números naturais consecutivos.

(1,0) (b) Responda à mesma questão no caso do produto de quatro números naturais consecutivos.

Em ambos os itens, justifique a sua resposta.

Questão 2.

(1,0) (a) Determine os possíveis restos da divisão de a^3 por 7, onde a é um número natural.

(1,0) (b) Prove que se a e b são naturais e $a^3 + 2b^3$ é divisível por 7, então a e b são divisíveis por 7.

Questão 3.

(1,0) (a) Determine todos os valores possíveis para $(n + 1, n^2 + 4)$.

(1,0) (b) Sabendo que o resto da divisão de n por 5 não é 4, determine $[n + 1, n^2 + 4]$.

Questão 4.

(1,5) Determine todos os números naturais que, quando divididos por 18, deixam resto 6 e, quando divididos por 14, deixam resto 4.

Questão 5.

Sejam p e q dois números naturais, com $1 < p < q$ e $(p, q) = 1$. Sabemos que existem números naturais não nulos u e v tais que $up - vq = 1$.

(1,0) (a) Mostre que existem dois números naturais p_1 e q_1, não nulos, com $p_1 < p$ tais que $q_1 p - p_1 q = 1$. Conclua que $(p_1, q_1) = 1$ e que $q_1 < q$. *Sugestão:* Divida v por p, usando o algoritmo da divisão, para encontrar p_1.

(0,5) (b) Mostre que $n_1 = qq_1$ é tal que

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{p_1}{q_1}.$$

Conclua que $p_1 < q_1$.

(1,0) (c) Prove que para quaisquer números naturais p e q com $1 < p < q$ e com $(p, q) = 1$, existe um número natural $r > 0$ e números naturais $n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 1$ tais que

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_r}.$$