MA13 – Geometria – AV1 – 2014

Questão 1 [2,0 pt]

Considere um paralelogramo $ABCD$ e sejam

- M o centro da circunferência definida pelos vértices A, B e C
- N o centro da circunferência definida pelos vértices B, C e D;
- O o centro da circunferência definida pelos vértices C, D e A;
- P o centro da circunferência definida pelos vértices D, A e B;

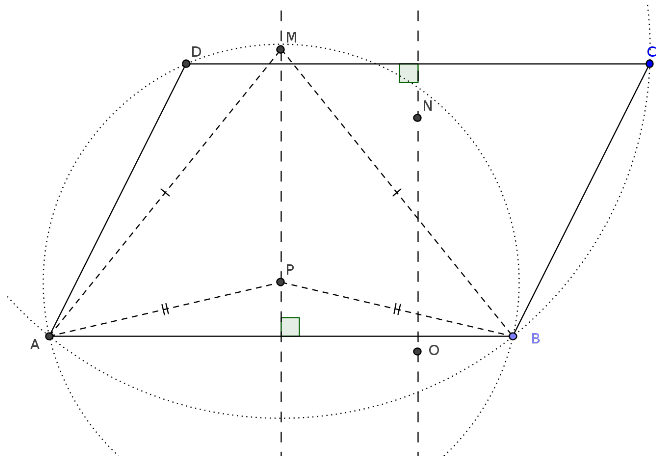
com M, N, O e P dois a dois distintos. Nessas condições, e sabendo que $ABCD$ não é um retângulo, mostre que:

(a) $MNOP$ é um paralelogramo;

(b) $MNOP$ e $ABCD$ possuem ângulos internos iguais.

Solução

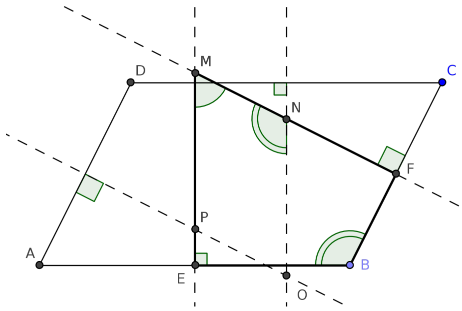
(a) Como M é centro de uma circunferência que contém A e B, temos $MA \equiv MB$, portanto, M pertence à mediatriz do lado AB. Mas P também é centro de uma circunferência que contém A e B, logo, P também pertence à mediatriz do lado AB. Assim, MP está contido nesta mediatriz.



Da mesma forma, N e O são centros de circunferências que contêm os pontos C e D, portanto, N e O pertencem à mediatriz do lado CD, o que implica que o segmento NO está contido nesta mediatriz.

Como $ABCD$ não é um retângulo, as mediatrizes que contêm MP e NO não coincidem. Como os lados AB e CD são paralelos, suas respectivas mediatrizes também serão. Mas, como os segmentos MP e NO estão contidos cada um em uma destas duas mediatrizes, eles serão também paralelos. Por argumentação análoga, MN e OP estão contidos, respectivamente, nas mediatrizes de BC e AD, portanto serão também paralelos. Isto mostra que $MNOP$ é um paralelogramo.

(b) Denotemos por E e F os pontos médios de AB e BC, respectivamente.



Considerando o quadrilátero $MEBF$, temos

$$\angle(EBF) + \angle(BFM) + \angle(FME) + \angle(MEB) = 360°,$$

e, como $B\hat{F}M$ e $M\hat{E}B$ são retos, temos

$$\angle(ABC) + \angle(FME) + \angle(EBF) + \angle(FME) = 180°.$$

Por outro lado,

$$\angle(ONM) + \angle(FME) = \angle(ONM) + \angle(NMP) = 180°,$$

pois $O\hat{N}M$ e $N\hat{M}P$ são ângulos suplementares, já que MP e OP são retas paralelas.

Assim, $\angle(ABC) = \angle(ONM)$, valendo o mesmo para seus congruentes no paralelogramo, isto é, $\angle(ADC) = \angle(MPO)$. Consequentemente, seus suplementares $B\hat{C}D$, $D\hat{A}B$, $N\hat{M}P$ e $P\hat{O}N$ serão também congruentes.

Questão 2 **[2,0 pt]**

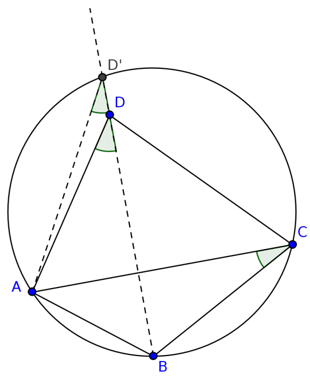
Seja $ABCD$ (em ordem) um quadrilátero convexo. Prove que se

$$\angle BDA = \angle ACB$$

então o quadrilátero é inscritível em um círculo. Verifique, justificando, se a recíproca é verdadeira.

Solução

Considere o círculo determinado por A, B e C. Vamos provar que D pertence a esta circunferência. Seja D' a interseção (diferente de B) da semirreta $\overrightarrow{BD}$ com a circunferência. Supondo por absurdo que D não pertença à circunferência, teremos $D' \neq D$. Com isso, $\angle(BD'A) = \angle(ACB)$, pois ambos são ângulos inscritos na circunferência e determinam o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$, e, com isso, $\angle(BD'A) = \angle(BDA)$, pois $\angle(BDA) = \angle(ACB)$ por hipótese.



Caso D esteja entre D' e B, o ângulo externo $A\hat{D}B$ do triângulo ADD' seria congruente ao ângulo interno $A\hat{D}'D$, o que é um absurdo. Caso D' esteja entre D e B, o ângulo externo $A\hat{D}'B$ seria congruente ao ângulo interno $A\hat{D}D'$, o que também é um absurdo.

A recíproca é obviamente verdadeira, pois se $ABCD$ é inscritível em um círculo, os ângulos inscritos $B\hat{D}A$ e $A\hat{C}B$ determinarão o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$, portanto, $\angle(BDA) = \angle(ACB)$.

Questão 3 **[2,0 pt]**

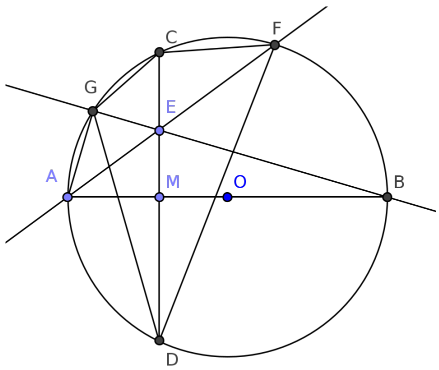
Num círculo, tomam-se um diâmetro AB e uma corda CD, perpendiculares entre si. Sendo E um ponto qualquer de CD, as retas suportes de AE e BE cortam a circunferência em F e G, respectivamente.

(a) Prove que a semirreta $\overrightarrow{FA}$ bissecta $C\hat{F}D$ e que a semirreta $\overrightarrow{GB}$ bissecta $C\hat{G}D$.

(b) Prove que o quadrilátero $CFDG$ tem dois lados consecutivos na mesma razão que os dois outros.

Solução

(a) Como AB é um diâmetro que intersecta a corda CD perpendicularmente, esta interseção ocorrerá no ponto médio M de CD. Assim, sendo O o centro do círculo, pelo caso LLL, os triângulos COM e DOM serão congruentes, e então $C\hat{O}A \equiv D\hat{O}A$.



Com isso, $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{AD}$, portanto os ângulos inscritos que os determinam, $C\hat{F}A$ e $A\hat{F}D$, serão congruentes. Isto mostra que a semirreta $\overrightarrow{FA}$ intersecta o ângulo $C\hat{F}D$.

Da mesma forma, $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{BD}$, logo os ângulos incritos, $C\hat{G}B$ e $D\hat{G}B$, serão congruentes. Isto mostra que a semirreta $\overrightarrow{GB}$ intersecta o ângulo $C\hat{G}D$.

(b) Considerando o triângulo CFD, FE será uma bissetriz interna, portanto

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \therefore \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}.$$

Da mesma forma, no triângulo CGD, GE também será uma bissetriz interna, e então

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DG}} \therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{CG}}.$$

Questão 4 [2,0 pt]

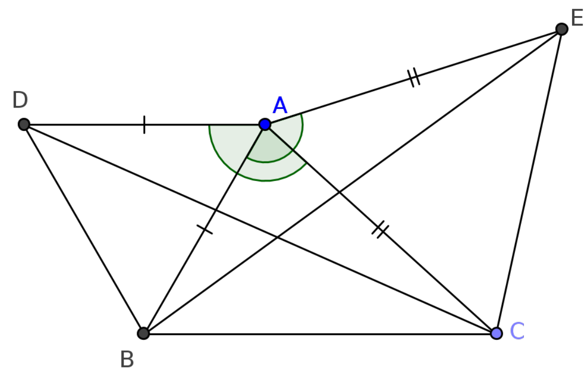
Dado um triângulo acutângulo ABC de baricentro G, constrói-se os triângulos equiláteros ABD e ACE, exteriores a ABC, de baricentros H e I, respectivamente.

(a) Mostre que $CD \equiv BE$.

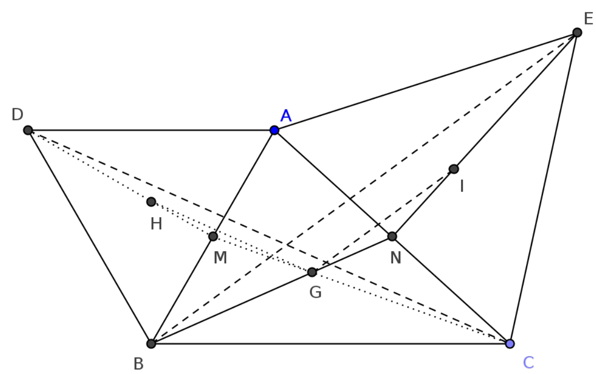
(b) Mostre que $GH \equiv GI$.

Solução

(a) Observe que $\angle(CAD) = \angle(CAB) + 60° = \angle(EAB)$. Além disso, como $AC \equiv AE$ e $AD \equiv AB$, pelo caso LAL, os triângulos ACD e AEB serão congruentes. Com isso, os lados BE e CD serão congruentes.



(b) Sejam M e N pontos médios de AB e AC, respectivamente.



Como

$$\overline{GN} = \frac{1}{3}\overline{BN} \ \text{ e } \ \overline{IN} = \frac{1}{3}\overline{EN},$$

e como $G\hat{N}I \equiv B\hat{N}E$, os triângulos BNE e GNI serão semelhantes, de razão de semelhança $\frac{1}{3}$. Assim,

$$\overline{GI} = \frac{1}{3}\overline{BE}.$$

Analogamente, trabalhando com os triângulos semelhantes CMD e GMH,

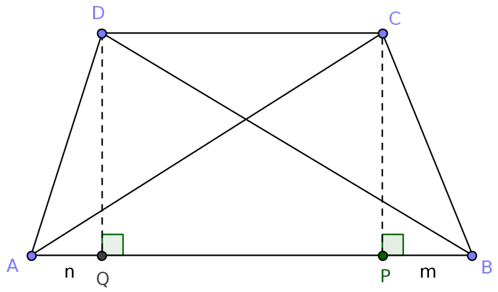
$$\overline{GH} = \frac{1}{3}\overline{CD}.$$

Mas, como $CD \equiv BE$, temos $\overline{GI} = \overline{GH}$, portanto $GI \equiv GH$.

Questão 5 **[2,0 pt]**

Seja $ABCD$ um trapézio de base maior AB e base menor CD. Sendo $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$, $\overline{BC} = b$, $\overline{AD} = d$, determine a soma dos quadrados das medidas das diagonais AC e BD em função de a, b, c e d. **Solução**

Sejam por P e Q as projeções ortogonais sobre AB de C e D, respectivamente. Denotemos por m e n as medidas de PB e AQ, respectivamente, e por h a altura do trapézio, relativa a AB.



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos APC e BQD, temos

$$D_1^2 = (a-m)^2 + h^2,$$

$$D_2^2 = (a-n)^2 + h^2,$$

onde D_1 e D_2 são as medidas das diagonais AC e BD, respectivamente. Por outro lado, aplicando Pitágoras aos triângulos AQD e BPC,

$$h^2 = d^2 - n^2,$$

$$h^2 = b^2 - m^2,$$

logo,

$$D_1^2 = (a-m)^2 + d^2 - n^2,$$

$$D_2^2 = (a-n)^2 + b^2 - m^2.$$

Somando as duas equações, temos

$$\begin{aligned} D_1^2 + D_2^2 &= (a-m)^2 + d^2 - n^2 + (a-n)^2 + b^2 - m^2 \\ &= 2a^2 - 2am - 2an + b^2 + d^2 \\ &= 2a^2 - 2a(m+n) + b^2 + d^2. \end{aligned}$$

Como $m + n = a - c$, temos então

$$D_1^2 + D_2^2 = 2a^2 - 2a(a-c) + d^2 + b^2 = 2ac + b^2 + d^2.$$