**Questão 1** [ 2,0 pt ]

(a) Defina progressão geométrica de primeiro termo $a$ e razão $q$ ($q \neq 0$ e $q \neq 1$).

(b) Conjecture uma fórmula para o termo geral $a_n$ em função de $a, n$ e $q$. Em seguida, prove essa fórmula por indução em $n$.

(c) Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, conjecture uma fórmula para $S_n$ em função de $a, n$ e $q$. Em seguida, prove essa fórmula por indução em $n$.

(d) A partir dos itens (b) e (c), obtenha uma fórmula para $S_n$ em função $a, a_n$ e $q$.

**Solução**

(a) Uma *progressão geométrica* com primeiro termo $a$ e razão $q(q \neq 0$ e $q \neq 1)$ é uma sequência de números cujo primeiro termo é $a$ e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão.

Em símbolos, $a_1 = a$ e $a_n = a_{n-1} \cdot q$, se $n \geq 2$.

(b) Calculemos alguns termos pela definição:

$a_2 = a_1 \cdot q = aq, a_3 = a_2 \cdot q = aq \cdot q = aq^2, a_4 = a_3 \cdot q = aq^2 \cdot q = aq^3$.

A partir destes cálculos, conjecturamos que $a_n = aq^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

Vamos provar esta conjectura por indução em $n$.

Para $n = 1$ é claramente válida, pois $a_1 = a = aq^0 = aq^{1-1}$.

Agora suponhamos que o resultado é válido para um certo $n = k \geq 1$, ou seja, $a_k = aq^{k-1}$.

Para $n = k+1$ segue que $a_{k+1} = a_{k+1-1} \cdot q = a_k \cdot q = aq^{k-1} \cdot q = aq^k$ e portanto está provada a conjectura.

(c) Temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e usando o resultado acima podemos reescrever a soma

$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$. Multiplicando ambos os lados por $q$ segue que

$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots aq^{n-1} + aq^n$.

Logo temos que $S_n - qS_n = a - aq^n$, ou seja, $(1-q)S_n = q(1-q^n)$ e podemos conjecturar que

$S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, para todo $n \geq 1$.

Vamos provar este resultado por indução em $n$.

Para $n = 1$ é fácil ver que $S_1 = a_1 = a = \dfrac{a(1-q)}{1-q}$.

Agora suponhamos que o resultado vale para um certo $n = k$.

Para $n = k+1$ temos que

$S_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = \dfrac{a(1-q^k)}{1-q} + aq^k = \dfrac{a - aq^k + aq^k - aq^{k+1}}{1-q} =$

$\dfrac{a(1-q^{k+1})}{1-q}$ e portanto está provada a conjectura.

(d) Pelo item (b) temos que $a_n = aq^{n-1}$ e pelo item (c) $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.

Logo segue que

$S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a - aq^{n-1}q}{1-q} = \dfrac{a - a_n q}{1-q}$.

**Questão 2** [ 2,0 pt ]

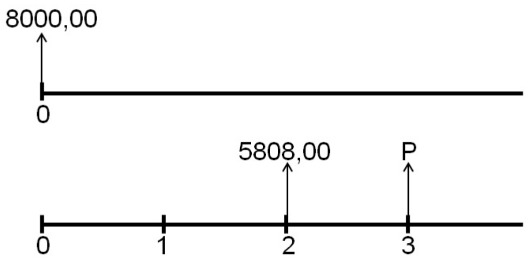
Um comerciante contraiu um empréstimo de R$ 8000,00 a juros semestrais de 10%. O pagamento foi realizado em duas parcelas, uma de R$ 5808,00 após um ano da contratação do empréstimo e a outra seis meses após a primeira.

(a) Calcule o valor da segunda parcela do empréstimo.

(b) Caso o comerciante optasse por quitar a dívida em 3 parcelas semestrais fixas, a primeira a partir do 1º semestre após a contratação do empréstimo, qual seria o valor das parcelas?

**Solução**

(a) Considerando os esquemas de pagamentos da figura, ambos são equivalentes, ou seja, R$ 8000,00, na data zero, tem o mesmo valor de R$ 5808,00 dois semestres após (data 2), mais um pagamento $P$, na data 3.

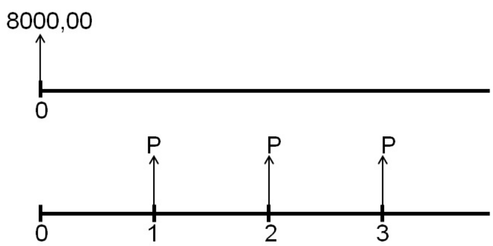



Igualando os valores, na época zero, dos pagamentos em ambos os esquemas, obtemos:

$$8000 = \frac{5808}{1,1^2} + \frac{P}{1,1^3} \Rightarrow 8000 = \frac{5808}{1,21} + \frac{P}{1,331} \Rightarrow 8000 = 4800 + \frac{P}{1,331} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3200 = \frac{P}{1,331} \Rightarrow P = 4259,20$$

(b) Considerando os esquemas equivalentes de pagamentos da figura, o pagamento de R$ 8000,00 na data zero tem o mesmo valor de 3 parcelas semestrais $P$, a partir do primeiro semestre após a contratação.




Igualando os valores dos pagamentos de ambos os esquemas, na data zero, obtemos:

$$8000 = \frac{P}{1,1} + \frac{P}{1,1^2} + \frac{P}{1,1^3} \Rightarrow 8000 = \frac{1,21P + 1,1P + P}{1,331} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10648 = 3,31P \Rightarrow P = \frac{10648}{3,31} \Rightarrow P = 3216,92$$

**Questão 3** [ 2,0 pt ]

Resolva a equação de recorrência $T_n = 4T_{n-1} + 2^n, T_0 = 9$.

**Solução**
Uma solução não-nula de $T_n = 4T_{n-1}$ é, por exemplo, $T_n = 4^n$. Agora fazemos a substituição $T_n = 4^n y_n$ e obtemos $4^n y_n = 4 \cdot 4^{n-1} y_{n-1} + 2^n$, ou seja, $y_n = y_{n-1} + 2^{-n}$, para $n \geq 1$.

Daí temos que

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 2^{-1} \\ y_2 &= y_1 + 2^{-2} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-3} \\ &\cdots\cdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-n}. \end{aligned}$$

Somando as parcelas da esquerda e da direita, das igualdades acima, temos

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n = y_0 + 2^{-1} + y_1 + 2^{-2} + y_2 + 2^{-3} + \cdots + y_{n-1} + 2^{-n}.$$

Cancelando os termos obtemos

$$y_n = y_0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-n} = y_0 + \frac{2^{-1}\left[1 - (2^{-1})^n\right]}{1 - 2^{-1}} = y_0 + 1 - 2^{-n}.$$

Como $T_n = 4^n y_n$ e $T_0 = 9$, temos $y_0 = 9$ e $y_n = 10 - 2^{-n}$. Portanto,

$$T_n = 4^n(10 - 2^{-n}) = 10 \cdot 4^n - 2^n.$$

## Questão 4 [ 2,0 pt ]

Considere a sequência $a_1 = 2, a_2 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$. Prove, por indução em $n$, que:

(a) $a_n > \left(\dfrac{8}{5}\right)^n$, para todo $n \geq 1$.

(b) $a_n < \left(\dfrac{17}{10}\right)^n$, para todo $n \geq 4$.

**Solução**
(a) Seja $P(n)$ a proposição: $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, para todo $n \geq 1$.

Para $n = 1$ temos que $a_1 = 2 > \frac{8}{5}$. Além disso, para $n = 2$, temos que $a_2 = 3 = \frac{75}{25} > \frac{64}{25} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$.

Suponhamos agora que $P(n)$ é verdadeira até $n = k \geq 2$, ou seja, $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, para $n = 1, \ldots, k$. Devemos provar que $P(n)$ continua válida para $n = k + 1$. De fato,

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} > \left(\frac{8}{5}\right)^k + \left(\frac{8}{5}\right)^{k-1} = \left(\frac{8}{5}\right)^k \left(1 + \frac{5}{8}\right) = \left(\frac{8}{5}\right)^k \cdot \frac{13}{8} > \left(\frac{8}{5}\right)^k \cdot \frac{8}{5} = \left(\frac{8}{5}\right)^{k+1}.$$

e assim $P(k + 1)$ é verdadeira.

(b) Agora seja $Q(n)$ a proposição: $a_n < \left(\frac{17}{10}\right)^n$, para todo $n \geq 4$.

Para $n = 4$ temos que $a_4 = 8 < \frac{83521}{10000} = \left(\frac{17}{10}\right)^4$. De modo análogo, para $n = 5$ temos que $a_5 = 13 < \frac{1419857}{100000} = \left(\frac{17}{10}\right)^5$.

Suponhamos agora que $Q(n)$ é verdadeira até $n = k \geq 5$, ou seja, $a_n < \left(\frac{17}{10}\right)^n$, para $n = 4, \ldots, k$.
Devemos provar que $Q(n)$ continua válida para $n = k + 1$. De fato,

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} < \left(\frac{17}{10}\right)^k + \left(\frac{17}{10}\right)^{k-1} = \left(\frac{17}{10}\right)^k \left(1 + \frac{10}{17}\right) = \left(\frac{17}{10}\right)^k \cdot \frac{27}{17} < \left(\frac{17}{10}\right)^k \cdot \frac{17}{10} = \left(\frac{17}{10}\right)^{k+1}.$$

e assim $Q(k + 1)$ é verdadeira.

**Questão 5** [ 2,0 pt ]

---

Quantas soluções inteiras e positivas ($x > 0$ e $y > 0$) possui a equação $2x + 3y = 2014$?

**Solução**

Inicialmente observemos que se $(x_0, y_0)$ é uma solução inteira $(x_0, y_0 \in \mathbb{Z})$ da equação $2x+3y = 2014$, então $(x_0-3t, y_0+2t), t \in \mathbb{Z}$, são todas as soluções inteiras da mesma. Com isso é suficiente obter uma solução inteira.

É fácil ver que $(1007, 0)$ é uma solução. Então as soluções inteiras são dadas por $x = 1007 - 3t, y = 2t, t \in \mathbb{Z}$. Como desejamos apenas soluções positivas ($x > 0$ e $y > 0$), devemos ter $1007 - 3t > 0$ e $2t > 0$. Resolvendo ambas as inequações obtemos $0 < t < \dfrac{1007}{3}$. Mas como $\dfrac{1007}{3} = 335,66...$ e $t$ deve ser inteiro segue que $1 \leq t \leq 335$.

Portanto a equação $2x + 3y = 2014$ possui 335 soluções inteiras positivas, a saber $x = 1007 - 3t, y = 2t, 1 \leq t \leq 335$.

**Outra solução**

É fácil que uma solução da equação é $x_0 = 1007$ e $y_0 = 0$, mas essa solução não é positiva. A partir dela podemos criar várias soluções $x = 1007 - 3n, y = 2n$, com $n$ inteiro positivo, que formam progressões aritméticas de razão $-3$ e $2$ em $x$ e $y$, respectivamente.

Como desejamos que $x$ também seja positivo devemos ter $1007-3n > 0$, ou seja, $n \leq 335$. Portanto a equação $2x+3y = 2014$ possui 335 soluções inteiras positivas, a saber $x = 1007 - 3n, y = 2n, 1 \leq n \leq 335$.