PROFMAT

MA12 – Matemática Discreta – Prova 1 – 2011

SBM

Questão 1.

Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ definida como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2+3 \\ a_3 &= 4+5+6 \\ a_4 &= 7+8+9+10 \\ &\dots \end{aligned}$$

(0.5) (a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?

(0.5) (b) Calcule a_{10}.

(1.0) (c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Questão 2.

Um comerciante, para quem o dinheiro vale 5% ao mês, oferece determinado produto por 3 prestações mensais iguais a R$ 100,00, a primeira paga no ato da compra.

(1.0) (a) Que valor o comerciante deve cobrar por esse produto, no caso de pagamento à vista?

(1.0) (b) Se um consumidor desejar pagar o produto em três prestações mensais iguais, mas sendo a primeira paga um mês após a compra, qual deve ser o valor das parcelas?

Utilize, se desejar, os seguintes valores para as potências de $1,05$: $1,05^2 = 1,1025$; $1,05^{-1} = 0,9524$; $1,05^{-2} = 0,9070$.

Questão 3.

Considere o conjunto dos números escritos apenas com os algarismos 1, 2 e 3, em que o algarismo 1 aparece uma quantidade **par** de vezes (por exemplo, 2322 e 12123). Seja a_n a quantidade desses números contendo exatamente n algarismos.

(0.4) (a) Liste todos esses números para $n = 1$ e $n = 2$, indicando os valores de a_1 e a_2.

(0.8) (b) Explique por que a_n satisfaz a equação de recorrência $a_{n+1} = (3^n - a_n) + 2a_n$, para $n \geq 1$ (note que 3^n é o número total de números com n algarismos iguais a 1, 2 ou 3).

(0.8) (c) Resolva a equação de recorrência em (b).

Questão 4.

(1.0) (a) Mostre, *por indução finita*, que

$$1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \ldots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}.$$

(1.0) (b) Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ progressão geométrica com termo inicial a_1 positivo e razão $r > 1$, e S_n a soma dos n primeiros termos da progressão. Prove, *por indução finita*, que $S_n \leq \frac{r}{r-1} a_n$, para qualquer $n \geq 1$.

Questão 5.

Seja $(x_n)_{n \geq 0}$ sequência definida pela relação de recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com termo inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.

(0.5) (a) Encontre x_0 tal que a sequência seja constante e igual a um número real a.

(1.0) (b) Resolva a recorrência com a substituição $x_n = y_n + a$, em que a é valor encontrado em (a).

(0.5) (c) Para que valores de x_0 a sequência é crescente? Justifique.