

**Questão 1.**

Um pequeno barco a vela, com 7 tripulantes, deve atravessar o oceano em 42 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de 3,5 litros de água por dia (e é o que os tripulantes fazem). Após 12 dias de viagem, o barco encontra 3 náufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

- (1.0) (a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prosseguir como antes?
- (1.0) (b) Se os 10 ocupantes de agora continuarem consumindo 3,5 litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

**Questão 2.**

- (1.0) (a) Quais são os valores de  $y$  para os quais existe uma função quadrática  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 5$  e  $f(3) = y$ ?
- (1.0) (b) Tome  $y = 9$  e determine a função quadrática correspondente. Justifique seus argumentos.

**Questão 3.**

- (1.0) (a) Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. Dê as definições de  $f(X)$  e  $f^{-1}(Y)$ , para  $X \subset A$  e  $Y \subset B$ . Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ , determine os conjuntos  $f(\mathbb{R})$  e  $f^{-1}(3)$ .
- (1.0) (b) Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. Prove que  $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ , quaisquer que sejam  $X, Y \subset A$ . Dê um exemplo em que  $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$ .

**Questão 4.**

- (0.5) (a) Se  $r \neq 0$  é um número racional, prove que  $r\sqrt{2}$  é irracional.
- (0.5) (b) Dado qualquer número real  $\epsilon > 0$ , prove que existe um número irracional  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha < \epsilon$ .
- (1.0) (c) Mostre que todo intervalo  $[a, b]$ , com  $a < b$ , contém algum número irracional.

**Questão 5.**

Sejam  $m$  e  $n$  números naturais primos entre si.

- (1.0) (a) Mostre que  $\frac{m}{n}$  é equivalente a uma fração decimal (isto é, com denominador potência de 10) se, e somente se,  $n$  não tem fatores primos diferentes de 2 ou 5.
- (1.0) (b) Mostre que se  $n$  tem outros fatores primos além de 2 ou 5 então a expansão decimal é infinita e, a partir de um certo ponto, periódica.